

doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2019.05.011

沿任意直线方向逃逸的鱼雷击舰问题

余时伟¹, 金 诚²

(电子科技大学 数学科学学院¹ 和光电科学与工程学院², 成都 611731)

摘 要 研究了战舰沿任意直线方向逃逸时的鱼雷击舰问题,通过坐标旋转变换求解了鱼雷的运动轨迹方程的解析解.

关键词 鱼雷击舰; 微分方程; 坐标变换

中图分类号 G420 文献标识码 A 文章编号 1008-1399(2019)05-0029-03

Torpedo Tracing of Warship Escaping Along a Linear Direction

YU Shiwei¹ and JIN Cheng²

(School of Mathematical Sciences¹, School of Optoelectronic Science and Engineering²,
University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract Under the condition that a warship escapes along a linear direction, the analytic solution of the torpedo tracing trajectory is obtained by solving the corresponding differential equation using the coordinates rotation transformation.

Keywords torpedo tracing of warship, ordinary differential equation, coordinate transformations

1 引言

鱼雷击舰问题,或者类似的导弹追击飞机问题、潜艇追踪军舰问题和猎犬追击狐狸问题等,均属于追击问题,也是利用微分方程求解的典型应用问题.其求解算法有助于理解微分方程在实际问题中的应用思想.这类问题在微积分教材^[1]或相关文献^[2, 3, 4]中均进行了具体问题求解.在这些求解算法中,往往假设逃逸路径为垂直于追击物和被追击物的连线方向.然而,在实际中,逃逸路径可以为任意直线方向,此时利用微分方程求解追击运动轨迹变得十分困难.蒋雪峰等^[5]对此问题进行了探索,通过数值模拟计算绘制了追击轨迹,但并未得到追击轨迹的运动方程.本文研究了敌舰沿任意直线方向逃逸时的鱼雷击舰问题.通过坐标系旋转变换求

解一个复杂的微分方程,得到鱼雷的运动轨迹的解析解.不仅为解决追击问题提供了新的思想和方法,也丰富了微分方程的求解算法.

问题描述:一敌舰在某海域内航行时,我方战舰恰位于敌舰正西方 a 海里处,我舰向敌舰发射制导鱼雷.设敌舰以恒定速度 v 海里/分钟沿直线方向路径逃逸,而鱼雷以恒速追击敌舰,鱼雷的速度为敌舰速度的 k ($k > 1$) 倍.在追击过程中,鱼雷的运动方向始终指向敌舰,求鱼雷的运动轨迹方程、追击时间和追击航程.

2 建立数学模型

如图 1 所示,以鱼雷初始出发位置为坐标原点,两舰连线为 x 轴,建立 xOy 直角坐标系.敌舰的初始位置为 $A(0, a)$.设鱼雷的追击曲线为二阶连续可导函数 $y = y(x)$.一般情况下,敌舰在逃逸时应远离我方战舰,不妨设敌舰逃逸方向为与 x 轴成 θ 角方向,其中, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.设时刻 t 时,鱼雷的坐标位置为 $P(x, y)$,容易得到此时敌舰航行的位置坐标为 $Q(vt \cos \theta + a, vt \sin \theta)$.

利用导数的几何意义得到鱼雷追击路径曲线函

收稿日期: 2019-01-25 修改日期: 2019-03-05

基金项目: 电子科技大学特色教材项目和电子科技大学数学文化课程建设项目资助.

作者简介: 余时伟(1974-),男,硕士,讲师,从事微积分、数学文化和图像分析研究. Email: shiweiyu365@126.com.

金诚(2000-),男,光电科学与工程学院 2018 级本科学
生. Email: 2018051408004@std.uestc.edu.cn.

数满足的微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{vt \sin \theta - y}{vt \cos \theta + a - x}. \quad (1)$$

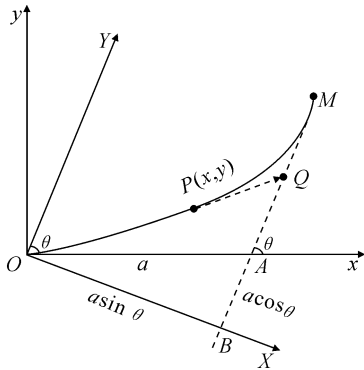


图 1

利用导数的几何意义得到鱼雷追击路径曲线函数满足的微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{vt \sin \theta - y}{vt \cos \theta + a - x}. \quad (1)$$

由(1)式解出 t 得

$$t = \frac{xy' - y - ay'}{vy' \cos \theta - v \sin \theta}. \quad (2)$$

由已知鱼雷的速度为 kv , 即

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = kv.$$

由于 $\frac{dx}{dt} \geq 0$, 所以

$$\frac{dx}{dt} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = kv. \quad (3)$$

将(2)式两端同时对 x 求导, 利用(3)式, 微分方程(2)可化为

$$\frac{(x-a)y'(y' \cos \theta - \sin \theta) - y'' \cos \theta (xy' - ay' - y)}{(y' \cos \theta - \sin \theta)^2} = \frac{1}{k} \sqrt{1 + y'^2}, \quad (4)$$

初值条件为 $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

直接求解微分方程(4)显得十分困难. 为了得到鱼雷追击曲线方程的解析解, 需对原坐标系进行坐标轴旋转变换. 如图 1 所示, 将原坐标系沿顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 角, 得到新坐标系 XOY . 新旧坐标系之间的坐标变换公式为

$$\begin{cases} Y = x \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) + y \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = x \sin \theta - y \cos \theta, \\ X = -x \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) + y \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = x \cos \theta + y \sin \theta. \end{cases} \quad (5)$$

在 XOY 坐标系中, 设鱼雷的追击运动轨迹为

二阶连续可导函数 $Y = Y(X)$. 在时刻 t 时, 设鱼雷位置为 $P(X, Y)$, 敌舰的位置为 Q . 设 QA 的延长线交 X 轴于点 B , 由几何关系可得

$$|\vec{OB}| = a \sin \theta, |\vec{AB}| = a \cos \theta,$$

所以 Q 点坐标为 $(a \sin \theta, a \cos \theta + vt)$. 由此可得

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a \cos \theta + vt - Y}{a \sin \theta - X}. \quad (6)$$

将(6)式改写为

$$(a \sin \theta - X) \frac{dY}{dX} = a \cos \theta + vt - Y. \quad (7)$$

将(7)式两边同时对 X 求导得

$$(a \sin \theta - X) \frac{d^2 Y}{dX^2} = v \frac{dt}{dX}. \quad (8)$$

由 $\sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2} = kv$, 且 $\frac{dX}{dt} > 0$ 可得

$$\frac{dt}{dX} = \frac{1}{kv} \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2}. \quad (9)$$

将(9)式代入(8)式可得微分方程

$$(a \sin \theta - X) \frac{d^2 Y}{dX^2} = \frac{1}{k} \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2}. \quad (10)$$

由于在 $X = 0$ 时鱼雷的轨迹曲线与 OA 直线相切, 所以(10)式的初始条件为 $Y(0) = 0$,

$$Y'(0) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta.$$

3 数学模型求解

式(10)为可降阶的二阶常微分方程. 令 $P = \frac{dY}{dX}$, 则 $\frac{d^2 Y}{dX^2} = \frac{dP}{dX} = P'$, $P(0) = Y'(0) = \cot \theta$, 则微分方程(10)式可化为可分离变量方程

$$(a \sin \theta - X) P' = \frac{1}{k} \sqrt{1 + P^2},$$

其通解为

$$\begin{aligned} \operatorname{arsh} P &= \ln(P + \sqrt{1 + P^2}) \\ &= -\frac{1}{k} \ln(a \sin \theta - X) + C_1. \end{aligned} \quad (11)$$

利用初始条件可得

$$C_1 = \ln\left[a^{\frac{1}{k}} (1 + \cos \theta) (\sin \theta)^{\frac{1-k}{k}}\right]. \quad (12)$$

利用公式 $(\sqrt{1 + P^2} + P)(\sqrt{1 + P^2} - P) = 1$ 将(11)式化为

$$P = \frac{1}{2} e^{-C_1} \left[e^{2C_1} (a \sin \theta - X)^{-\frac{1}{k}} - (a \sin \theta - X)^{\frac{1}{k}} \right]. \quad (13)$$

对(13)式直接积分可得其通解为

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{2} e^{-C_1} \left(\frac{k}{k+1} (a \sin \theta - X)^{\frac{k+1}{k}} - \right. \\ &\quad \left. \frac{k}{k-1} e^{2C_1} (a \sin \theta - X)^{\frac{k-1}{k}} \right) + C_2. \end{aligned} \quad (14)$$

利用初始条件可得

$$C_2 = \frac{ak}{2(k-1)(1+\cos\theta)} \left[(1+\cos\theta)^2 (\sin\theta)^{\frac{2k^2-2k+1}{k(k-1)}} - \frac{k-1}{k+1} (\sin\theta)^{\frac{1}{k(1-k)}} \right]. \quad (15)$$

将(12)式中 C_1 和(15)式中 C_2 代入(14)式可得微分方程(10)式的特解为

$$Y = \frac{(\sin\theta)^{\frac{k-1}{k}}}{2(1+\cos\theta)a^{\frac{1}{k}}} \left[\frac{k}{k+1} (a\sin\theta - X)^{\frac{k+1}{k}} - \frac{k}{k-1} a^{\frac{2}{k}} \cdot (1+\cos\theta)^2 (\sin\theta)^{\frac{2(1-k)}{k}} (a\sin\theta - X)^{\frac{k-1}{k}} \right] + \frac{ak}{2(k-1)(1+\cos\theta)} \left[(1+\cos\theta)^2 (\sin\theta)^{\frac{2k^2-2k+1}{k(k-1)}} - \frac{k-1}{k+1} (\sin\theta)^{\frac{1}{k(1-k)}} \right]. \quad (16)$$

当 $X = a\sin\theta$ 时, 鱼雷击中敌舰. 将其代入(16)式得敌舰被击中时的航程为

$$s = \frac{ak}{2(k-1)(1+\cos\theta)} \left[(1+\cos\theta)^2 (\sin\theta)^{\frac{2k^2-2k+1}{k(k-1)}} - \frac{k-1}{k+1} (\sin\theta)^{\frac{1}{k(1-k)}} \right] - a\cos\theta,$$

故鱼雷的追击时间为

$$t = \frac{ak}{2v(k-1)(1+\cos\theta)} \left[(1+\cos\theta)^2 (\sin\theta)^{\frac{2k^2-2k+1}{k(k-1)}} - \frac{k-1}{k+1} (\sin\theta)^{\frac{1}{k(1-k)}} \right] - \frac{1}{v} a\cos\theta.$$

容易得到鱼雷的追击航程为

$$S = \frac{ak^2}{2(k-1)(1+\cos\theta)} \left[(1+\cos\theta)^2 (\sin\theta)^{\frac{2k^2-2k+1}{k(k-1)}} - \frac{k-1}{k+1} (\sin\theta)^{\frac{1}{k(1-k)}} \right] - ak\cos\theta.$$

特别地, 分别取 $\theta = \frac{\pi}{4}, a = 1, k = 2, v = 0.42$ 海里/分钟,

代入数值容易得到, 当敌舰航行至坐标点 $M(0.7071, 1.6095)$ 附近时被鱼雷击中, 此时, 敌舰逃逸航程为

$$s = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0.9024 \text{ 海里. 鱼雷的追击时间为 } t =$$

$$\frac{1}{0.42} \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} \right) \times 60 \approx 128.9098 \text{ 秒. 鱼雷的追击航程为 } S = \frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{6} \approx 1.8047 \text{ 海里.}$$

将坐标变换(5)式代入(16)式可得微分方程(4)式满足初值条件的特解, 即在 xOy 坐标系下鱼雷的运动轨迹方程为

式满足初值条件的特解, 即在 xOy 坐标系下鱼雷的运动轨迹方程为

$$x\sin\theta - y\cos\theta = \frac{(\sin\theta)^{\frac{k-1}{k}}}{2(1+\cos\theta)a^{\frac{1}{k}}} \left[\frac{k}{k+1} (a\sin\theta - x\cos\theta + y\sin\theta)^{\frac{k+1}{k}} - \frac{k}{k-1} a^{\frac{2}{k}} (1+\cos\theta)^2 (\sin\theta)^{\frac{2(1-k)}{k}} (a\sin\theta - x\cos\theta + y\sin\theta)^{\frac{k-1}{k}} \right] + \frac{ak}{2(k-1)(1+\cos\theta)} \left[(1+\cos\theta)^2 (\sin\theta)^{\frac{2k^2-2k+1}{k(k-1)}} - \frac{k-1}{k+1} (\sin\theta)^{\frac{1}{k(1-k)}} \right]. \quad (17)$$

在(17)式中, 令 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 此时敌舰沿两舰连线的垂直方向逃逸, 得到鱼雷的运动方程^[1, 3]

$$y = \frac{k}{2(k+1)} (a-x)^{\frac{k+1}{k}} - \frac{k}{2(k-1)} (a-x)^{\frac{k-1}{k}} + \frac{k}{2(k-1)} a^{\frac{k-1}{k}} - \frac{k}{2(k+1)} a^{\frac{k+1}{k}}.$$

图 2(a) 显示了当取 $\theta = \frac{\pi}{4}, a = 1, v = 0.42$ 海里/分钟, 分别取 $k = 2, 3, 4, 5$ 时, 鱼雷和敌舰在 XOY 坐标系下的运动轨迹曲线, 而图 2(b) 则显示了相应的轨迹曲线在 xOy 坐标系下的图像.

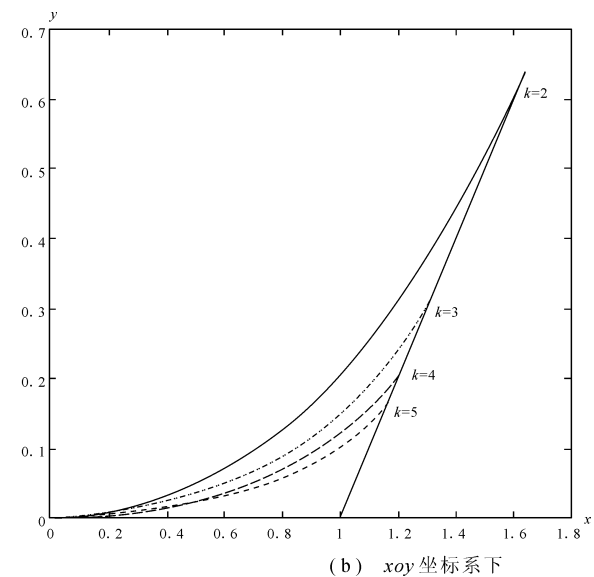
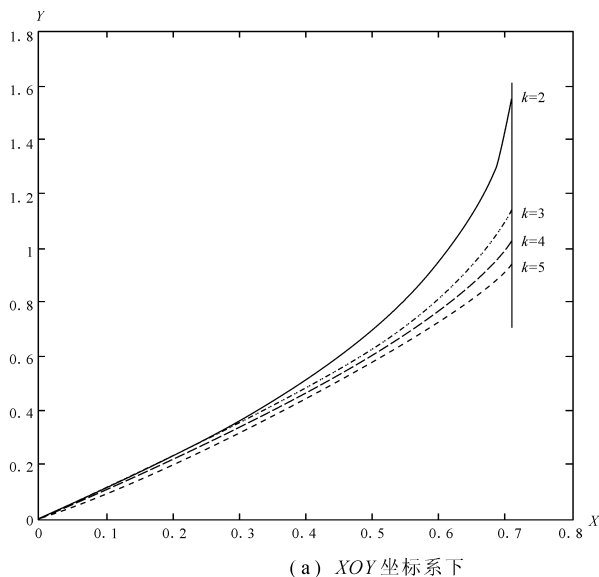


图 2 鱼雷和敌舰的运动轨迹曲线

(下转第 43 页)

证明 设 $C=A+B$,

\because 对于 $\forall z \in C$, 都 $\exists x \in A, y \in B$, 使得 $z=x+y$.

又 \because 对于 $\forall x \in A, y \in B$, 都有 $x \leq \sup A, y \leq \sup B$,

$\therefore z=x+y \leq \sup A + \sup B$,

即 $\sup A + \sup B$ 是 C 的一个上界.

由上确界定义的第(ii)条得:

对于 $\forall \epsilon > 0, \exists x' \in A, y' \in B$,

使得 $x' > \sup A - \epsilon, y' > \sup B - \epsilon$,

\therefore 对于 $\forall \epsilon > 0, \exists z' = x' + y'$,

使得 $z' > \sup A + \sup B - 2\epsilon$,

由于 ϵ 的任意性得 $\sup A + \sup B$ 为 C 的最小上界,

$\therefore \sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

同理可证: $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

IV: $\sup_{x_1, x_2 \in D} |f(x_1) - f(x_2)| = \sup_{x \in D} f(x) - \inf_{x \in D} f(x)$

证明 \because 对于 $\forall x_1, x_2 \in D$,

都有 $\inf_{x \in D} f(x) \leq f(x_1) \leq \sup_{x \in D} f(x)$,

$\inf_{x \in D} f(x) \leq f(x_2) \leq \sup_{x \in D} f(x)$,

$\therefore |f(x_1) - f(x_2)| \leq \sup_{x \in D} f(x) - \inf_{x \in D} f(x)$,

即 $\sup_{x \in D} f(x) - \inf_{x \in D} f(x)$ 是 $|f(x_1) - f(x_2)|$ 的一个上界.

\because 对于 $\forall \epsilon > 0, \exists x'_1, x'_2 \in D$, 使得 $f(x'_1) >$

$\sup_{x \in D} f(x) - \epsilon, f(x'_2) < \inf_{x \in D} f(x) + \epsilon$,

\therefore 对于 $\forall \epsilon > 0, \exists x'_1, x'_2 \in D$, 使得

$|f(x'_1) - f(x'_2)| > \sup_{x \in D} f(x) - \inf_{x \in D} f(x) - 2\epsilon$.

由于 ϵ 的任意性得

$\sup_{x \in D} f(x) - \inf_{x \in D} f(x)$ 是 $|f(x_1) - f(x_2)|$ 的最小上界.

$\therefore \sup_{x_1, x_2 \in D} |f(x_1) - f(x_2)| = \sup_{x \in D} f(x) - \inf_{x \in D} f(x)$.

以上即为运用三种思路证明的七组确界不等

式. 对于这三种思路, 可能解题时会有交叉运用的情况, 不仅仅只用到其中一种思路(比如第 V 组, 在证明时不仅仅运用了思路 2, 也运用了思路 1, 但将其归为运用思路 2, 是由于其解题最关键的一步运用了思路 2), 所以, 希望读者在解题时能够综合运用这三种思路, 使解题过程更完整, 更富有逻辑性.

3 结语

通过上文 2.1、2.2、2.3 节运用三种思路来证明七组确界不等式, 相信读者已经能够灵活运用这些思路去解决更多的确界不等式问题. 证明题虽然不像有些代数题那样有着固定的解题方法, 但其中蕴藏的思维逻辑却更值得归纳与总结. 通过大量的归纳、总结与应用, 相信大家证明问题的水平一定会有一个质的飞跃. 最后, 留三个思考题作为练习, 检测大家是否掌握了以上三种思路.

练习题

1. 设 $f(x), g(x)$ 有界, 且满足 $f(x) \leq g(x), x \in D$, 证明: $\sup_{x \in D} f(x) \leq \sup_{x \in D} g(x); \inf_{x \in D} f(x) \leq \inf_{x \in D} g(x)$.

(提示: 运用思路 1)

2. 设有两个数集 A 和 B , 满足 $A \subset [a, b], B \subset [b, c] (a < b < c)$, 证明: $\sup A \leq \inf B$. (提示: 运用思路 2)

3. 设数集 A 有界, 且数集 $B = \{x+c | x \in A\}$ (c 为常数), 证明: $\sup B = \sup A + c; \inf B = \inf A + c$. (提示: 运用思路 3)

参考文献

- [1] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010: 6.

(上接第 31 页)

4 结论

论文研究了敌舰沿任意直线方向逃逸时的鱼雷击舰问题. 通过数学建模得到微分方程(4), 然而, 求解该微分方程显得十分困难. 本文利用类比思想, 通过坐标旋转变换, 将问题归结为敌舰沿垂直于两舰连线方向逃逸情况, 从而得到了敌舰沿任意直线方向逃逸时鱼雷追击的运动轨迹方程的解析解. 本文不仅为解决追击问题提供了新的思想方法, 也为求解微分方程提供了坐标旋转变换的计算方法.

参考文献

- [1] 电子科技大学数学科学学院. 微积分上册[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [2] 向隆万, 乐经良. 导弹跟踪问题[J]. 高等数学研究, 1999, 12(04): 35-43.
- [3] 夏必腊, 沈浮, 程燕, 等. 鱼雷追击海上目标为题的数学模型研究[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(7): 123-126.
- [4] 王光宇. “等速率追击”问题研究[J]. 物理通报, 2012, 11: 58-60.
- [5] 蒋雪峰, 蔡佳利, 周洋靖, 等. 潜艇追踪问题研究[J]. 科技广场, 2011, 3: 17-19.